



Algèbre II, espaces vectoriels et applications linéaires



Présentation

Description

Cette fait suite à l'UE de S1 (Algèbre I) où ont été introduits algèbre linéaire dans \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^n , calcul matriciel et polynômes à coefficients réels.

L'objectif est d'introduire quelques concepts élémentaires de structure algébrique, et approfondir le travail sur les espaces vectoriels et les applications linéaires, ainsi que les polynômes.

Objectifs

- Les structures en algèbre

- * Loi de composition interne sur un ensemble
- * Notion d'associativité, de commutativité, d'élément neutre, d'inverse
- * Notion de groupe, d'anneau et de corps
- * Calcul dans un anneau. Identités remarquables et formule du binôme.
- * Exemples (\mathbb{C} est un corps, racines de l'unité, groupe des permutations, anneau des polynômes et des endomorphismes/matrices, groupe des automorphismes/matrices inversibles et sous-groupe des isométries, etc.)

- La structure d'espace vectoriel

- * Structure d'espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} . Cas \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n , espace des suites réelles, espace des fonctions numériques

- * Combinaisons linéaires et colinéarité
- * Sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré par une partie familles génératrices, familles libres, bases, dimension, théorème de la base incomplète et de l'échange
- * Somme et somme directe de sous-espaces, supplémentaire.
- * Rang d'une famille de vecteurs
- * Formule de Grassmann
- Applications linéaires
 - * Noyau et image
 - * Correspondance application linéaire matrice avec toutes les propriétés usuelles.
 - * Changement de base
 - * Invariance de la trace par changement de base et définition de la trace d'un endomorphisme, $\text{tr}(uv)=\text{tr}(vu)$.
 - * Isomorphisme et application linéaire réciproque. Groupes $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}(n)$.
 - * Projection, symétrie, homothétie
 - * Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice. Théorème du rang. Invariance du rang par composition/multiplication par des matrices inversibles
 - * Forme échelonnée réduite d'une matrice, opérations élémentaires
 - * Retour sur les systèmes linéaires, lien rang d'une matrice/ nombre de pivots de sa forme échelonnée réduite, dimension du noyau/nombre de variables libres
- Polynômes
 - * Retour sur $\mathbb{K}[X]$, vu comme espace vectoriel
 - * Cas de $\mathbb{K}^n[X]$: changement de bases, décomposition des polynômes dans des bases du type $1, X-a, (X-a)^2, \dots$
 - * Preuve de a racine de P ssi il existe Q tel que $P=(X-a)Q$



- * Formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité des racines
- * Polynômes interpolateur de Lagrange
- * Substitution de l'indéterminée

Pré-requis nécessaires

Programme de mathématiques du S1, et en particulier Algèbre I, Géométrie dans le plan et plan complexe, et Raisonnement et théorie des ensembles.

Pré-requis recommandés :

Programme de mathématiques du S1.

Informations complémentaires

Volumes horaires :

CM : 30 h

TD : 30 h

TP : 0

Terrain : 0

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Simon MODESTE

☎ 04 67 14 35 80

✉ simon.modeste@umontpellier.fr